



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξετάσεις Ιουνίου 2017

1. Για να υπολογίσουμε τη μάζα λεπτής επίπεδης πλάκας με πυκνότητα $\rho(x, y) = x^2 + y^2$ χρησιμοποιούμε τον παρακάτω τύπο:

$$m = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

- (α) Περιγράψτε το σχήμα της πλάκας. [1]
 (β) Περιγράψτε τη μάζα με ένα μόνο διπλό ολοκλήρωμα και υπολογίστε την. [1]
2. Ένα σωματίδιο κινείται στην τροχιά $\vec{r} = \cos(\omega t)\mathbf{i} + \sin(\omega t)\mathbf{j}$, όπου ω μία σταθερά. Να δείξετε ότι:
- (α) Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι κάθετη στο διάνυσμα \vec{r} . [1]
 (β) Η επιτάχυνσή του \vec{a} έχει φορά προς την αρχή των αξόνων και μέτρο ανάλογο της απόστασης $|\vec{r}|$. [1]
 (γ) Το διάνυσμα $\vec{r} \times \vec{v}$ είναι σταθερό. [1]
3. Σε ένα μακρινό γαλαξία εξωγήινοι ετοιμάζουν την επίθεσή τους στη Γη! Οι ιπτάμενοι δίσκοι τους είναι κατασκευασμένοι από δύο παραβολοειδή, τα οποία έχουν ύψος h και ακτίνα a , που συγκολλούνται στη βάση τους, δηλαδή,

$$z(x, y) = \pm h \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right),$$



όπου το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί στην επάνω επιφάνεια και το αρνητικό στην κάτω.

- (α) Υποθέτοντας ότι το υλικό που χρησιμοποιούν έχει σταθερή πυκνότητα ρ βρείτε την πολική ροπή αδράνειας $I_0 = I_x + I_y$, του δίσκου γύρω από τον άξονα z . [1]
 (β) Βρείτε τη μάζα, M , του δίσκου και δείξτε ότι $I_0 = \frac{1}{3} M a^2$. [1]
 (γ) Στον πλανήτη τους οι βαρυτικές δυνάμεις είναι της μορφής $\vec{F} = -\frac{45}{r^3} \vec{r}$, όπου $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ και $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Βρείτε τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσουν ώστε να ελαχιστοποιήσουν την ενέργεια (έργο) που πρέπει να δαπανήσουν για να μετακινηθούν στο πεδίο από μια απόσταση r_1 σε μια απόσταση r_2 . Ποιο είναι το συνολικό έργο που θα ξοδέψουν; Δίνεται $\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r}$. [1]
4. Δίνεται η συνάρτηση Lagrange, $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$, που αντιστοιχεί σε μονοδιάστατη κίνηση, όπου m και k σταθερές και $\dot{x} = dx/dt$. [1]

- (α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σύστημα. [1]
 (β) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και περιγράψτε την κίνηση του συστήματος. [1]
 (γ) Περιγράψτε τον φασικό χώρο του συστήματος. [1]

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Για την επιτυχία του μαθήματος απαιτούνται 5 μονάδες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!